



فصل اول

آمار

تألیف: فهیم علوی

سال تحصیلی ۹۹-۹۸

ریاضی پایه

معیارهای گرایش به مرکز

(۱) میانگین داده‌ها

میانگین یا متوسط داده‌ها را با نماد \bar{x} نمایش می‌دهیم و مقدار آن، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

میانگین موزون داده‌ها (میانگین وزن‌دار): اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم به طوری که هریک از این

داده‌ها دارای تکرار w_1, w_2, \dots, w_n باشند، میانگین موزون داده‌ها با نماد \bar{x}_w نشان می‌دهیم مقدار آن، از

رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: میانگین ۴ درس دانش‌آموزی هر کدام با ضریب یک برابر با ۱۵.۵ است. نمره درس پنجم او که با ضریب

۲ منظور می‌گردد چه عددی باشد تا میانگین ۵ درس او برابر با ۱۶.۵ شود؟

مثال: میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۱ و ۲۲ را به این داده‌ها اضافه کنیم، میانگین جدید چه

عدد خواهد بود؟

مثال: ۱۰ داده آماری با میانگین ۸ را با ۲۰ داده با میانگین ۱۱ با یکدیگر ادغام می‌کنیم. میانگین تمامی داده‌های

موجود را بیابید.

مثال: در ۵۵ داده آماری، میانگین ۸۷ محاسبه شده است. بعد از محاسبه متوجه شدیم که در جمع اعداد، عدد ۵۱۲ را به اشتباه ۳۴۷ وارد کرده بودیم و از اینرو دوباره میانگین را محاسبه می‌کنیم. میانگین جدید را بیابید.

مثال: با افزودن اعداد ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰ به ۱۵ داده، میانگین آنها تغییر نمی‌کند. مجموع این ۱۵ داده را بیابید.

مثال: اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4 برابر با a باشد، میانگین داده‌های $3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, 3x_3 - x_4, 3x_4 - x_1$ را بر حسب a بیابید.

مثال: اگر میانگین داده‌های $x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_n - n$ برابر با a باشد، میانگین داده‌های $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ را بر حسب a و n بیابید.

مثال: اگر داده‌ها را a برابر کرده و سپس به هر یک مقدار b اضافه کنیم، میانگین داده‌های جدید چه تغییری می‌کند؟

مثال: اگر میانگین داده‌های $1 - 2x_1, 1 - 2x_2, 1 - 2x_3, \dots, 1 - 2x_n$ برابر با 8 باشد، میانگین داده‌های $1 - 3x_1, 1 - 3x_2, 1 - 3x_3, \dots, 1 - 3x_n$ را بیابید.

مثال: روشی سریع برای محاسبه ذهنی میانگین چندین داده ارائه دهید. این روش بر پایه چه اصلی است؟

نکته:

مثال: با توجه به جدول زیر، میانگین درصد دانش‌آموز را محاسبه نمائید.

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	زبان	ادبیات	دینی	عربی
درصد	۸۰	۷۰	۷۰	۶۵	۷۵	۶۵	۷۰
ضریب درس	۱۲	۹	۶	۲	۴	۴	۳

مثال: نمرات دانش آموزی در کنکور سراسری در جدول زیر آمده است. اگر میانگین درصد این دانش آموز ۶۳

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

باشد، درصد درس فیزیک او چقدر است؟

مثال: با توجه به داده‌های جدول زیر، میانگین داده‌ها را بیابید.

حدود دسته	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶	۲۶-۳۰
فراوانی	۱۰	۷	۱۵	۹	۹

مثال: در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده زیر، اگر به تمام داده‌ها ۱.۵ واحد اضافه شود، میانگین داده‌های

جدید برابر با ۱۰ می‌شود. زاویه متناظر با دسته سوم در نمودار دایره‌ای را بیابید.

حدود دسته	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷
فراوانی	۴	۵	a	۳

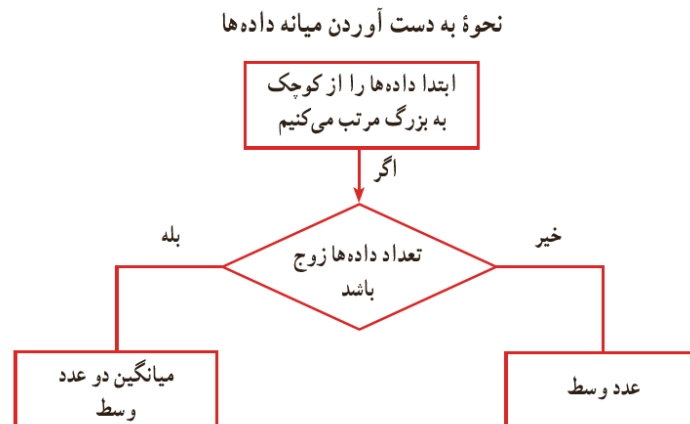
مثال: جدول زیر، مقادیر اختلاف از میانگین داده‌های آماری دسته‌بندی شده را مشخص می‌کند. فراوانی مطلق

انحراف از میانگین	-۴	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
فراوانی مطلق	۵	۱۱	۹	۴	۸	x	۳

دسته ششم را بیابید.

۲) میانہ

عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند را میانہ داده‌ها می‌گویند و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم. نحوه به دست آوردن میانہ به طریق زیر است.



نکته: اگر n فرد باشد، میانہ برابر با داده $a_{\frac{n+1}{2}}$ و اگر n زوج باشد، میانہ برابر با $\frac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ است.

خوبیہ میانہ اینہ کہ تحت تأثیر داده‌های پرت قرار نمیگیرہ، بنابراین اگر تویہ سری داده، داده‌های پرت زیاد بود، میثشہ بہ جای میانگین، از میانہ استفاده کرد.

مثال: میانہ داده‌های زیر را بہ دست آورید.

الف) ۲, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۲, ۱۵

ب) ۲, ۲, ۳, ۵, ۶, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۱۵, ۱۷, ۲۰

میانہ داده‌های کوچکتر از میانہ را چارک اول می‌گوییم و آن را با نماد Q_1 نمایش می‌دهیم. همچنین میانہ داده‌های بزرگتر از میانہ را چارک سوم می‌نامیم و آن را با نماد Q_3 نمایش می‌دهیم. حال در مثال بالا، چارک‌های اول و سوم در ہر سری از داده‌ها مشخص کنید.

مثال: در ۸۰ داده آماری دسته‌بندی شده، فراوانی نسبی دسته اول ۰.۱۲۵ است. اگر ۱۰ داده دیگر بزرگ‌تر از میانه به آنها افزوده شود، فراوانی نسبی دسته اول را بیابید.

مثال: میانه یک مجموعه از داده‌های مرتب شده، برابر میانگین چهارمین و پنجمین داده بوده و مجموع همه داده‌ها برابر با ۳۶۰ می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها را بیابید.

سوال: اگر داده‌ها را a برابر کرده و سپس به هر یک مقدار b اضافه کنیم، میانه داده‌های جدید چه تغییری می‌کند؟

مثال: در داده‌های a_1, a_2, \dots, a_n چارک اول برابر با ۹ و چارک سوم برابر با ۲۳ است. چارک اول و سوم برای داده‌های $-2a_1, -2a_2, \dots, -2a_n$ را بیابید.

مثال: داده‌های ۱۱، ۱۰، ۸، ۶، ۷، ۴، ۲، ۲، ۱ را در نظر بگیرید. با کم کردن ۶ واحد از بزرگ‌ترین داده، میانه این داده‌ها چند درصد تغییر می‌کند؟

نکته: اگر داده‌ها تسکیل یک تصاعد حسابی دهند، میانگین و میانه برابر با داده وسط (یا اگر داده‌ها زوج باشند، برابر با میانگین دو داده وسط) خواهد بود. همچنین، میانگین و میانه برابر با میانگین دو داده اول و آخر نیز می‌باشند.

معیارهای پراکندگی

(۱) دامنه تغییرات

دامنه تغییرات، ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که برابر با اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده می‌باشد و آن را با R نمایش می‌دهیم.

مثال: اگر دامنه تغییرات داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4 برابر صفر باشد، اختلاف میانگین و میانه داده‌های $x_1 + 3, x_2 + 2, x_3 + 1, 4x_4$ را بیابید.

مثال: اگر تمامی داده‌ها را در a ضرب کرده و سپس همه را با b جمع کنیم، دامنه تغییرات داده‌ها چه تغییری می‌کند؟

۲) انحراف معیار و واریانس

انحراف معیار: در آمار، یک معیار سنجش برای میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان، انحراف معیار است که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

اگر انحراف معیار داده‌ها عددی کوچک باشد، به این معنی است که پراکندگی داده‌ها حول میانگین کم است و فاصله داده‌ها از یکدیگر کم است و اگر این انحراف معیار عددی بزرگ باشد، به این معنی است که پراکندگی داده‌ها حول میانگین زیاد بوده و فاصله داده‌ها از یکدیگر زیاد می‌باشد. **اگر انحراف معیار داده‌ها صفر باشد**

یعنی

واریانس: به مجذور انحراف معیار، واریانس گفته می‌شود و آن را با نماد σ^2 نمایش می‌دهیم.

مثال: انحراف معیار داده‌های زیر را محاسبه نمائید.

۳۴, ۲۰, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۱۶, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۶

مثال: در ۶ داده آماری که از میان اعداد زوج یک تا بیست می‌باشند، اختلاف بین حداقل و حداکثر واریانس ممکن را بیابید.

مثال: اگر داده‌ها را در a ضرب کرده و همه را با b جمع کنیم، انحراف معیار و واریانس چه تغییری خواهند کرد؟

مثال: چه رابطه‌ای بین واریانس دو گروه از داده‌های زیر برقرار است؟

$$A: 8, 10, 14, 18, 20$$

$$B: 3, 4, 6, 8, 9$$

مثال: اگر واریانس داده‌های $a, b, c, d, 3$ برابر با صفر باشد، میانگین داده‌های $a + 2, b + 3, c + 4, d + 5, 9$ را بیابید.

مثال: مجموع مجذورات ۱۱ داده آماری برابر با ۲۲۰۰ و میانگین این داده‌ها برابر با ۱۴ است. واریانس این داده‌ها را بیابید.

مثال: اگر $x + y + z + t = 24$ و $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 200$ باشد، واریانس این ۴ عدد را بیابید.

مثال: اگر واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n با میانگین ۴ برابر با ۳ باشد، میانگین داده‌های $x_1^2 + 3x_1, \dots, x_n^2 + 3x_n$ را بیابید.

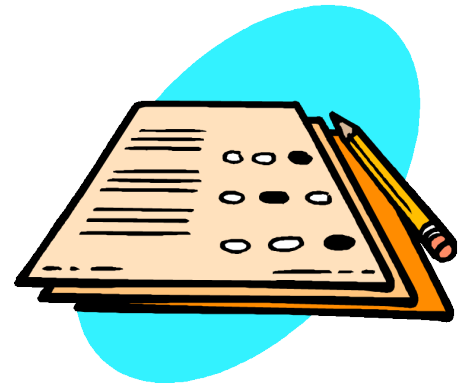
مثال: در ۱۲ داده آماری، میانگین و واریانس به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ را به آنها اضافه کنیم، واریانس داده‌های حاصل را بیابید.

مثال: واریانس ۲۰ داده آماری برابر با ۹ است. چند داده مساوی با میانگین به آنها اضافه کنیم تا واریانس داده‌ها برابر با ۶ شود؟

مثال: ۱۰ داده آماری با میانگین ۶ و ۸ داده آماری با میانگین ۱۵ داریم. اگر انحراف معیار این دو گروه از داده‌ها به ترتیب ۲ و ۳ باشد، واریانس کل ۱۸ داده را بیابید.

مثال: در ۱۳ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب برابر با ۱۶ و ۲ می‌باشند. اگر داده‌های ۶، ۸ و ۱۰ را از میان این داده‌ها حذف کنیم، واریانس داده‌های حاصل را بیابید.

معما!!!! تر از چیست؟



۳) ضریب تغییرات

ضریب تغییرات معیاری است که پراکندگی داده‌ها نسبت به میانگین را نشان می‌دهد.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هرچه ضریب تغییرات داده‌ها کمتر باشد، دقت و قابلیت اطمینان به داده‌ها بیشتر است. ضریب تغییرات داده‌ها، دارای واحد نمی‌باشد.

مثال: میانگین و انحراف معیار امتیازات فنی پروازهای یک خلبان ۳۰ ساله ۲۱ و ۳.۵ و میانگین و انحراف معیار یک خلبان ۴۰ ساله، ۲۵ و ۴ است. دقت عمل کدام خلبان بیشتر است؟

مثال: در داده‌های زیر، ضریب تغییرات را بیابید.

داده	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
تعداد	۵	۹	۱۱	۷	۶

مثال: اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده برابر با ۲ و میانگین آن‌ها نیز ۲ باشد، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

مثال: ضریب تغییرات داده‌های $x, x, 3x, 3x$ را بیابید.

مثال: اگر داده‌ها را در a ضرب کرده و همه را با b جمع کنیم، ضریب تغییرات چه تغییری خواهد کرد؟

مثال: اگر هر یک از داده‌ها را 25 درصد افزایش دهیم، ضریب تغییرات آنها چند درصد تغییر می‌کند؟

مثال: اگر ده داده آماری را دو برابر کرده و 5 واحد به هر کدام از آنها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های

جدید 1.5 برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های دوم را به دست آورید.

مثال: در n داده آماری، ضریب تغییرات برابر با 1.2 می‌باشد. ابتدا هر یک از داده‌ها را دو برابر کرده و سپس به

هر یک از آنها، میانگین اولیه را اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید را بیابید.

مثال: ضریب تغییرات سن خانواده‌ای پنج نفره در ۱۰ سال آینده، از ضریب تغییرات فعلی سن آنها، ۲۰ درصد کمتر است. مجموع سن فعلی اعضای این خانواده را بیابید.

مثال: در ۱۲ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر با ۷۲ و مجموع مجذورات آنها برابر با ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها را بیابید.

مثال: مجموع ۸ داده آماری برابر با ۴۸ و ضریب تغییرات آنها برابر با ۰.۵ می‌باشد. مجموع مربعات این داده‌ها را بیابید.

مثال: اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه اضلاع مربع‌هایی به ترتیب ۱۵ و ۰.۲ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها را بیابید.

مثال: میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر با ۸ و میانگین مساحت آنها برابر با ۶۵.۴۴ باشد، ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها را بیابید.

مثال: واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر سه داده ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به آنها اضافه شود، میانگین آنها تغییر نمی‌کند. ضریب تغییرات کل ۱۴ داده را بیابید.